

NGUYỄN THỪA HỢP

Giáo trình

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN THỪA HỢP

MỤC LỤC

GIÁO TRÌNH
**PHƯƠNG TRÌNH
ĐẠO HÀM RIÊNG**

(In lần thứ hai)



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Lời nói đầu	9
Mở đầu	11
Chương 1. Một số thí dụ dẫn tới các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng	13
1.1. Phương trình dao động của dây	13
1.2. Phương trình dao động của màng	18
1.3. Phương trình truyền nhiệt trong môi trường đẳng hướng	23
1.4. Phương trình Laplat	27
Chương 2. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai	29
Khái niệm về đặc trưng	29
2.1. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến.	29
2.2. Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp nhiều biến.	38
2.3. Khái niệm về đặc trưng	46
2.4. Bài toán Côsi và bài toán Côsi với dữ kiện cho trên mặt đặc trưng	50
2.5. Bài toán Côsi tổng quát và khái niệm về đặc trưng của một hệ phương trình	57
2.6. Về sự phụ thuộc liên tục của nghiệm đối với các dữ kiện biên.	64
Chương 3. Phương trình loại ellip. Phương trình Laplat	68
3.1. Phương trình Laplat và hàm điều hoà	68
3.2. Nghiệm cơ bản của phương trình Laplat	70

3.3. Công thức Gôrin đối với toán tử Laplat	71
3.4. Biểu diễn tích phân của hàm bất kỳ	73
3.5. Biểu diễn tích phân của hàm điều hoà	75
3.6. Các tính chất cơ bản của hàm điều hoà	76
3.7. Mở rộng kết quả cho phương trình có dạng tổng quát	84
Chương 4. Phương trình loại ellip (tiếp)	
Các bài toán Diriclé và Nôiman của phương trình Laplat	89
A. Bài toán Diriclé trong	
4.1. Định lý duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm đối với dữ kiện biên	89
4.2. Hàm Gôrin đối với bài toán Diriclé và tính chất của nó	90
4.3. Hàm Gôrin đối với hình cầu và công thức Poatxông	95
4.4. Định lý trung bình đảo. Các định lý Hác-nắc, Liuvín	103
B. Bài toán Diriclé ngoài	
4.5. Biến đổi nghịch đảo các bán kính véctơ	115
4.6. Định lý duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm đối với dữ kiện biên	118
4.7. Công thức Poatxông đối với miền ngoài của hình cầu.	120
4.8. Dáng điệu của đạo hàm hàm điều hoà tại vô tận.	121
C. Bài toán Nôiman	
4.9. Cách đặt bài toán Nôiman và định lý duy nhất	124
D. Hàm điều hoà trong mặt phẳng	
4.10. Hàm điều hoà trong mặt phẳng và hàm giải tích biến phức	131
4.11. Giải bài toán Diriclé trong mặt trong bằng phương pháp tách biến.	134
4.12. Tích phân Poatxông.	141
4.13. Hàm Gôrin và biến hình bảo giác	144

4.14. Bài toán Nôiman đối với mặt tròn. Công thức Dini	146
4.15. Chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán Diriclé.	148
Chương 5. Phương trình loại ellip (tiếp) Lý thuyết thế vị	162
A. Vài định nghĩa và khái niệm cần thiết	
5.1. Thế vị	162
5.2. Sự hội tụ của tích phân phụ thuộc tham biến	167
5.3. Góc khối	174
5.4. Mặt Liapunốp	178
B. Thế vị khối	
5.5. Tính liên tục và khả vi liên tục của thế vị khối. Phương trình Poatxông	189
C. Thế vị lớp kép	
5.6. Thế vị lớp kép và giá trị trực tiếp của nó.	197
5.7. Tích phân Gaoxo	200
5.8. Tính gián đoạn của thế vị lớp kép qua mặt tích phân	204
D. Thế vị lớp đơn	
5.9. Tính liên tục của thế vị lớp đơn	207
5.10. Tính gián đoạn của đạo hàm theo pháp tuyến của thế vị lớp đơn qua mặt tích phân.	212
E. Áp dụng phương pháp thế vị để khảo sát các bài toán biên của phương trình Laplat	
5.11. Một số kết quả về phương trình tích phân Fredhôm loại hai	219
5.12. Đưa các bài toán Diriclé và Nôiman của phương trình Laplat về phương trình tích phân.	221
5.13. Khảo sát các phương trình tích phân được thành lập nên.	224
5.14. Trường hợp các bài toán phẳng	233

Chương 6. Phương trình loại hypecbôn. Bài toán Côsi	239
6.1. Bài toán Côsi của phương trình truyền sóng và định lý duy nhất của nó	239
6.2. Công thức cho nghiệm của bài toán Côsi với phương trình truyền sóng.	244
6.3. Phương pháp hạ thấp.	252
6.4. Xây dựng trực tiếp công thức Dalembe và côngthức Kiếcsốpp	254
6.5. Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm của bài toán Côsi của phương trình truyền sóng vào dữ kiện ban đầu.	260
6.6. Ý nghĩa vật lý	260
6.7. Bài toán Guốc-sa của phương trình loại hypecbôn	269
6.8. Bài toán Côsi đối với phương trình loại hypecbôn (7.1)	278
6.9. Giải bài toán Côsi bằng phương pháp Riman	282
6.10. Bài toán Côsi đối với hệ phương trình loại hypecbôn cấp 1	286
Chương 7. Phương trình loại hypecbôn (tiếp). Bài toán hỗn hợp	293
7.1. Bài toán hỗn hợp và định lý duy nhất của nó	293
7.2. Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các dữ kiện ban đầu	297
7.3. Phương pháp tách biến (phương pháp Phuariê)	301
7.4. Sơ đồ tổng quát của phương pháp tách biến	316
7.5. Khảo sát sự dao động của một màng	320
Chương 8. Phương trình loại parabôn. Phương trình truyền nhiệt	330
A. Bài toán Côsi	330
8.1. Nguyên lý cực đại và cực tiểu	330
8.2. Định lý duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu của bài toán Côsi	337
B. Bài toán hỗn hợp	
8.3. Định lý duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện biên và ban đầu	350

8.4. Trường hợp nhiều biến	358
8.5. Giải bài toán hỗn hợp bằng phương pháp hàm Gôrin	359
8.6. Thế vị nhiệt	368
Chương 9. Hàm đặc biệt	372
A. Khái quát chung	
9.1. Dạng phương trình vi phân của một số các hàm đặc biệt	372
9.2. Bài toán về hàm riêng và giá trị riêng	375
B. Hàm trụ	
9.3. Phương trình Bétxen	378
9.4. Hàm sinh của hàm Bétxen	385
9.5. Áp dụng	388
C. Đa thức Lơgiăng	
9.6. Phương trình Lơgiăng	393
9.7. Hàm sinh của đa thức Lơgiăng	397
D. Hàm cầu	
9.8. Đa thức điều hoà	400
9.9. Hàm cầu và hàm Lơgiăng kết hợp	402
9.10. Sự trực giao của các hàm cầu	407
9.11. Áp dụng	412
Bài tập chương 2	417
Bài tập chương 3, 4, 5	419
Bài tập chương 6, 7	426
Bài tập chương 8	433
Tài liệu tham khảo	435

LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình đạo hàm riêng là một môn học trong năm học thứ ba của các trường Đại học Khoa học Tự nhiên (Tổng hợp cũ) và các trường đại học kỹ thuật. Nội dung của nó là việc nghiên cứu các phương trình đạo hàm riêng được áp dụng trong các lĩnh vực vật lý, cơ học.

Vì vậy nhiều người vẫn gọi môn học này là môn phương trình toán lý.

Giáo trình này được viết dựa trên cơ sở tập I của Bộ Giáo trình phương trình đạo hàm riêng (2 tập) của tác giả đã xuất bản trước đây. Trong lần xuất bản này nhiều nội dung đã được chỉnh lý và được bổ sung, đặc biệt có thêm một chương về hàm đặc biệt. Việc viết thêm chương hàm đặc biệt theo ý tác giả là cần thiết, vì rất nhiều môn học vật lý và kỹ thuật cũng thường cần dùng đến.

Tuy nhiên ở đây chỉ đề cập tới các hàm đặc biệt thông dụng : Hàm Bét xen, đa thức Logiăng và Hàm cầu.

Hàm Gamma được xem là đã biết trong giáo trình giải tích của năm thứ hai trong phần áp dụng của tích phân suy rộng thuộc tham biến. Ngoài ra, cuốn sách có thêm các đầu đề bài tập.

Tác giả đã chọn lựa nhiều bài tập có tính chất tính toán đồng thời cũng có nhiều bài tập mà cần tới sự suy nghĩ nghiêm túc về các vấn đề lý thuyết đã được đề cập trong giáo trình.

Tác giả mong được sự góp ý của độc giả về mọi phương diện và tác giả xin tỏ lòng cảm ơn trước.

Hà Nội, 20/12/1999

Nguyễn Thừa Hợp

MỞ ĐẦU

Một phương trình liên hệ giữa ẩn hàm $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, các biến độc lập $x_1, \dots, x_n$ và các đạo hàm riêng của nó được gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng. Nó có dạng :

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \dots) = 0$$

trong đó F là một hàm nào đó của các đối số của nó.

Cấp cao nhất của đạo hàm riêng của u , có mặt trong phương trình, được gọi là cấp của phương trình. Chẳng hạn, phương trình cấp một của hàm hai biến có dạng :

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

Phương trình cấp hai của hàm hai biến có dạng :

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0.$$

Phương trình đạo hàm riêng được gọi là *tuyến tính* nếu như nó tuyến tính đối với ẩn hàm và tất cả các đạo hàm riêng của nó. Chẳng hạn phương trình :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u = g(x, y),$$

là tuyến tính cấp hai.

Phương trình đạo hàm riêng được gọi là *á tuyến tính* nếu như nó tuyến tính đối với mọi đạo hàm cấp cao nhất của ẩn hàm. Chẳng hạn phương trình :

$$a(x, y, u, u_x, u_y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y, u, u_x, u_y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y, u, u_x, u_y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

là á tuyến tính cấp hai. Ở đây u_x, u_y là ký hiệu của $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

Quá trình nghiên cứu các phương trình đạo hàm riêng được khởi đầu bởi việc nghiên cứu những phương trình đạo hàm riêng thường gặp trong những lĩnh vực vật lý và cơ. Vì vậy đôi khi người ta còn quen gọi môn phương trình đạo hàm riêng là phương trình vật lý toán.

Trong giáo trình này, ta sẽ khảo sát chủ yếu các bài toán biên của những phương trình cổ điển thường hay gặp nhất, đó là phương trình Laplace, phương trình truyền sóng và phương trình truyền nhiệt; Phần cuối của giáo trình là chương đề cập tới các hàm đặc biệt thường gặp nhiều trong ứng dụng: Hàm Bétxen, đa thức Lơgiăng, hàm cầu và ứng dụng của chúng trong việc giải một số bài toán biên.