NGUYỄN THỪA HỢP

Giáo trình

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

ĐHQG HÀ NỘI
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN THỪA HỢP

GIÁO TRÌNH

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

(In lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Phương trình đạo hàm riêng là một môn học trong năm học thứ ba của các trường Đại học Khoa học Tự nhiên (Tổng hợp cũ) và các trường đại học kỹ thuật. Nội dung của nó là việc nghiên cứu các phương trình đạo hàm riêng được áp dụng trong các lĩnh vực vật lý, cơhọc.

Vì vậy nhiều người vẫn gọi môn học này là môn phương trình toán lý.

Giáo trình này được viết dựa trên cơsở tập I của Bộ Giáo trình phương trình đạo hàm riêng (2 tập) của tác giả đã xuất bản trước đây. Trong lần xuất bản này nhiều nội dung đã được chỉnh lý và được bổ sung, đặc biệt có thêm một chương về hàm đặc biệt. Việc viết thêm chương hàm đặc biệt theo ý tác giả là cần thiết, vì rất nhiều môn học vật lý và kỹ thuật cũng thường cần dùng đến.

Tuy nhiên ở đây chỉ đề cập tới các hàm đặc biệt thông dụng : Hàm Bét xen, đa thức Lơgiăng và Hàm cầu.

Hàm Gamma được xem là đã biết trong giáo trình giải tích của năm thứ hai trong phần áp dụng của tích phân suy rộng thuộc tham biến. Ngoài ra, cuốn sách có thêm các đầu đề bài tập.

Tác giả đã chọn lựa nhiều bài tập có tính chất tính toán đồng thời cũng có nhiều bài tập mà cần tới sự suy nghĩ nghiêm túc về các vấn đề lý thuyết đã được đề cập trong giáo trình.

Tác giả mong được sự góp ý của độc giả về mọi phương diện và tác giả xin tỏ lòng cảm ơn trước.

Hà Nội, 20/12/1999

Nguyễn Thừa Hợp

MỞ ĐẦU

Một phương trình liên hệ giữa ẩn hàm $u(x_1, x_2, \ldots x_n)$, các biến độc lập $x_1, \ldots, x_n$ và các đạo hàm riêng của nó được gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng. Nó có dạng :

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots) = 0$$

trong đó F là một hàm nào đó của các đối số của nó.

Cấp cao nhất của đạo hàm riêng của u, có mặt trong phương trình, được gọi là cấp của phương trình. Chẳng hạn, phương trình cấp một của hàm hai biến có dạng :

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

Phương trình cấp hai của hàm hai biến có dạng :

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0.$$

Phương trình đạo hàm riêng được gọi là *tuyến tính* nếu như nó tuyến tính đối với ẩn hàm và tất cả các đạo hàm riêng của nó. Chẳng hạn phương trình :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + \\ + f(x,y)u = g(x,y),$$

là tuyến tính cấp hai.

Phương trình đạo hàm riêng được gọi là *á tuyến tính* nếu như nó tuyến tính đối với mọi đạo hàm cấp cao nhất của ẩn hàm. Chẳng hạn phương trình :

$$a(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + c(x,y,u,u_x,u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y,u,u_x,u_y) = 0,$$

là á tuyến tính cấp hai. Ở đây u_x, u_y là ký hiệu của $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Quá trình nghiên cứu các phương trình đạo hàm riêng được khởi đầu bởi việc nghiên cứu những phương trình đạo hàm riêng thường gặp trong những lĩnh vực vật lý và cơ. Vì vậy đôi khi người ta còn quen gọi môn phương trình đạo hàm riêng là phương trình vật lý toán.

Trong giáo trình này, ta sẽ khảo sát chủ yếu các bài toán biên của những phương trình cổ điển thường hay gặp nhất, đó là phương trình Laplace, phương trình truyền sóng và phương trình truyền nhiệt; Phần cuối của giáo trình là chương đề cập tới các hàm đặc biệt thường gặp nhiều trong ứng dụng: Hàm Bétxen, đa thức Lơgiăng, hàm cầu và ứng dụng của chúng trong việc giải một số bài toán biên.